Distribuições contínuas

- ***Distribuição uniforme***:
  - ***Def***: Distribuição de probabilidades onde ***todos os valores possíveis pertencem a um intervalo finito*** **[*a*,*b*]** ***no qual a fdp é constante***.
  - ***Ex***:
    - X: "Erro na medição do diâmetro de um fio".

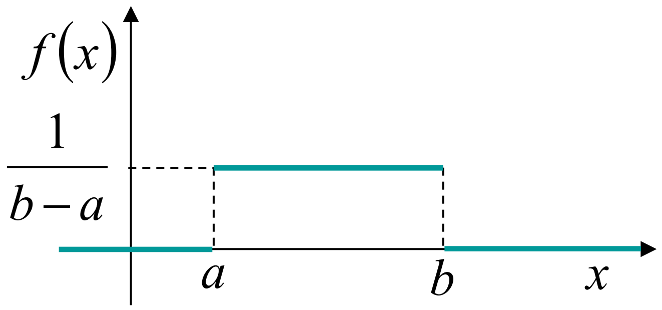
- *Def*: Se X é uma *v. a.* contínua com distribuição ***uniforme*** de ***parâmetros a*** e ***b***, então escreve-se:

$$X \sim \mathrm{U}(a,b)$$

Distribuição uniforme

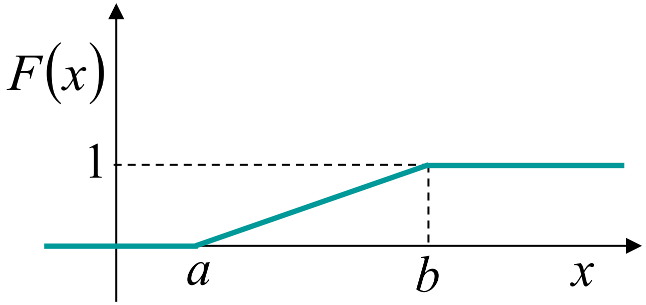
- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, então a sua ***f.d.p.*** é

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & ,x\in[a,b]\\ 0 & ,x\notin[a,b]\end{cases}$$



- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, então a sua ***função de distribuição*** é

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & ,a\le x\le b\\ 1 & ,x>b\end{cases}$$



R: $F(x)=punif(x,a,b)$

Distribuição uniforme

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, então a sua ***média*** é dada por

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- *Teor*: Se $X \sim \mathrm{U}(a,b)$, então a sua ***variância*** é dada por

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

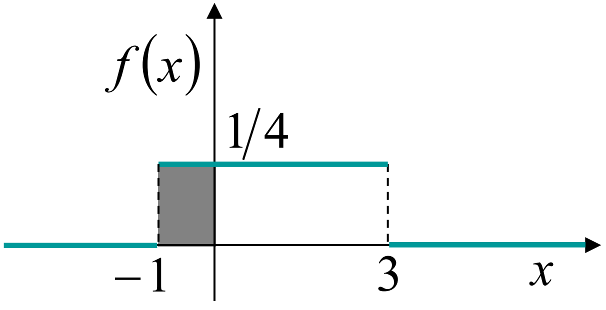
Exercício

Seja X uma *v.a.* contínua e uniformemente distribuída no intervalo [-1,3]. Calcule:

a) $P(X \leq 0)$

b) $P(X < 1)$

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & , x \in [-1,3] \\ 0 & , x \notin [-1,3] \end{cases}$$



$$P(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}[x]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}$$

Ou, em alternativa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \dfrac{x+1}{4} & , -1 \leq x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases} \quad \therefore \quad P(X \leq 0) = F(0) = \frac{1}{4}$$

b) $$P(X < 1) = P(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{2}$$

Porque X é *v. a.* contínua

Distribuição exponencial

- ***Distribuição exponencial***:
  - ***Def***: Distribuição de probabilidades duma *v. a.* que representa o ***intervalo*** (temporal ou espacial) ***entre ocorrências sucessivas*** de um fenómeno aleatório de Poisson.

- *Exercício*: Quais das seguintes definições podem ser *v. a.* exponenciais?

  a) X: "Tempo de vida duma lâmpada, em horas"

  b) X: "Peso de um bolo, em gramas"

  c) X: "Número de chamadas atendidas em 8 recebidas"

  d) X: "Distância entre os 2 primeiros atletas numa corrida, em metros"

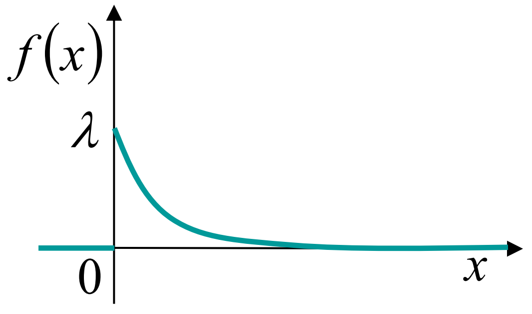
- *Def*: Se X é uma *v. a.* ***exponencial*** de ***parâmetro λ***, então escreve-se:

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Distribuição exponencial

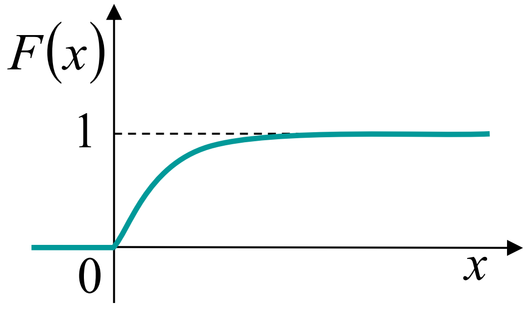
- *Teor*: Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então a sua ***f.d.p.*** é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$



- *Teor*: Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então a sua ***função de distribuição*** é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \end{cases}$$



R: $F(x) = pexp(x, \lambda)$

Distribuição exponencial

- *Teor*: Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então a sua ***média*** é dada por

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

- *Teor*: Se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, então a sua ***variância*** é dada por

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercício

Considere a *v.a.* X: "Tempo, em minutos, até aparecer o primeiro cliente numa dada loja após a abertura", sendo a sua função de distribuição dada por

$$F(x)=\begin{cases}0 & ,x<0\\ 1-e^{-0.4x} & ,x\geq 0\end{cases}$$

Determine a probabilidade do tempo de espera ser:

a) No máximo 3 minutos.

$$P(X\leq 3)=F(3)=1-e^{-0.4\times 3}=1-e^{-1.2}\approx 0.6988$$

b) Pelo menos 4 minutos.

$$P(X\geq 4)=1-P\left(X<4\right)=1-P(X\leq 4)=1-F(4)=1-(1-e^{-0.4\times 4})=e^{-1.6}\approx 0.2019$$

Porque X é *v. a.* contínua

Exercício

c) Entre 3 e 4 minutos.

$$P(3 \le X \le 4) = P(X \le 4) - P(X < 3) = P(X \le 4) - P(X \le 3)$$

Porque X é *v. a.* contínua

$$= F(4) - F(3) = (1 - e^{-0.4\times 4}) - (1 - e^{-0.4\times 3}) = -e^{-1.6} + e^{-1.2} \approx 0.0993$$

d) No máximo 3 ou pelo menos 4 minutos.

$$P(X \le 3 \cup X \ge 4) = P(X \le 3) + P(X \ge 4) = P(X \le 3) + 1 - P(X < 4)$$

Porque X é *v. a.* contínua

$$= P(X \le 3) + 1 - P(X \le 4) = F(3) + 1 - F(4) \ = 1 - e^{-0.4\times 3} + e^{-0.4\times 4}$$

$$= 1 - e^{-1.2} + e^{-1.6} \approx 0.9007$$

e) Exactamente 2.5 minutos.

$$P(X = 2.5) = 0$$